

Théorie des perturbations - Amortissement libre d'un oscillateur

Cas d'un oscillateur balancier - spiral

Balancier annulaire monométallique d'une montre bracelet

➔ Référence :E:\Résonateur (TA)\Data\Montre HES.mcd(R)

$$T_0 = 0.25 \text{ s} \quad f = 4 \text{ s}^{-1} \quad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f \quad J_b = 10 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2 \quad M_b = 59.5 \text{ mg}$$

Paramètres de frottement

Frottement sec

$$f_b := 5 \cdot 10^{-3}$$

Frottement visqueux

$$\eta_b := 2 \cdot 10^{-3}$$

Frottement quadratique

$$\kappa_b := 8 \cdot 10^{-5}$$

Équation différentielle

Système différentiel non linéaire

$$dq/dt = v$$

$$dv/dt = -\omega_0^2 q - 2\eta\omega_0 v + \varepsilon\kappa v^2 + \varepsilon\omega_0^2 f$$

Oscillateur non perturbé

Position initiale

$$q_0 := 180 \cdot \text{deg}$$

Vitesse initiale

$$v_0 := 90 \cdot \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$q_m := \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2} \quad x_0 := \arctan\left(\frac{v_0}{\omega_0 \cdot q_0}\right) \quad q_m = 272.941 \text{ deg} \quad \frac{x_0}{\omega_0} = 0.034 \text{ s} \quad \alpha(t) := \omega_0 \cdot t$$

$$\varphi_0(\alpha) := \alpha - x_0 \quad q_0(\alpha) := q_m \cdot \cos(\alpha - x_0) \quad v_0(\alpha) := -\omega_0 \cdot q_m \cdot \sin(\alpha - x_0) \quad v_m := -\omega_0 \cdot q_m$$

Oscillateur en oscillations libres amorties - Solution numérique

Force généralisée perturbatrice

Couple de frottement constant

$$F_c := f_b \cdot J_b \cdot \omega_0^2$$

$$F_c = 3.158 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Couple de frottement visqueux

$$F_v(v) := -2 \cdot \eta_b \cdot J_b \cdot \omega_0 \cdot v$$

$$F_v(v_m) = 1.204 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Couple de frottement quadratique

$$F_q(v) := \kappa_b \cdot J_b \cdot v^2$$

$$F_q(v_m) = 1.147 \times 10^{-9} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Force généralisée perturbatrice

$$F_{\text{gén}}(v) := F_c + F_v(v) + F_q(v)$$

$$F_{\text{gén}}(v_m) = 1.634 \times 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Fonction perturbatrice

$$\lambda := \frac{F_{\text{gén}}(v_m)}{J_b \cdot \omega_0^2 \cdot q_m}$$

$$\lambda = 5.431 \times 10^{-3}$$

$$Epsilon(v) := -\frac{v}{|v|}$$

$$f(v) := \frac{1}{\lambda} \cdot \left(Epsilon(v) \cdot f_b - \frac{2 \cdot \eta_b}{\omega_0} \cdot v + Epsilon(v) \cdot \frac{\kappa_b}{\omega_0^2} \cdot v^2 \right) \quad \omega_0 := \omega_0 \cdot s$$

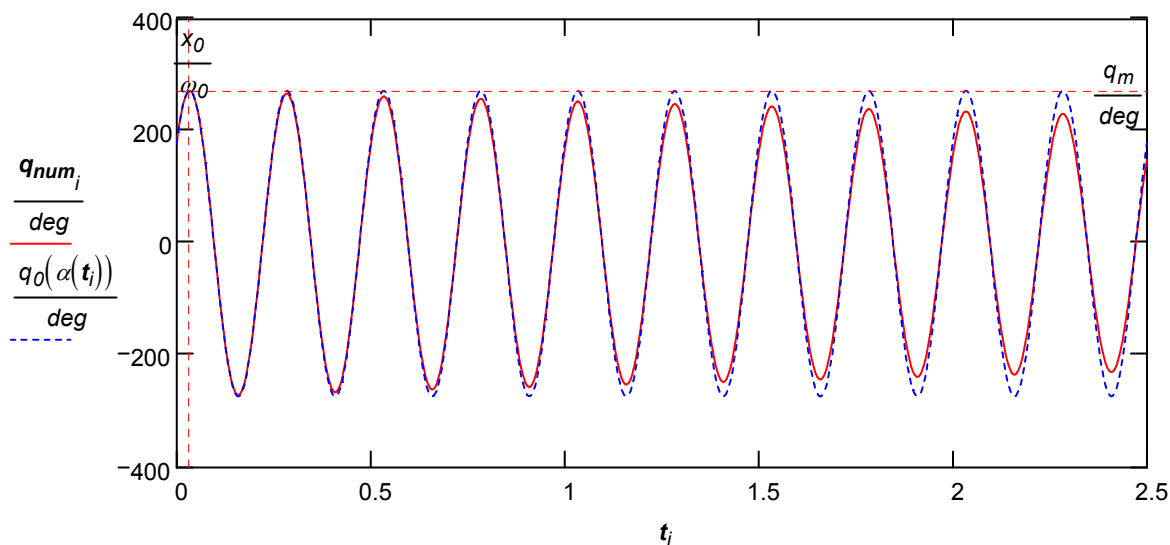
Solution numérique de l'équation différentielle

Durée d'observation (nombre de périodes): $nb_p := 10 \quad T_t := nb_p \cdot T_0 \quad np := 64 \cdot nb_p - 1 \quad i := 0..np$

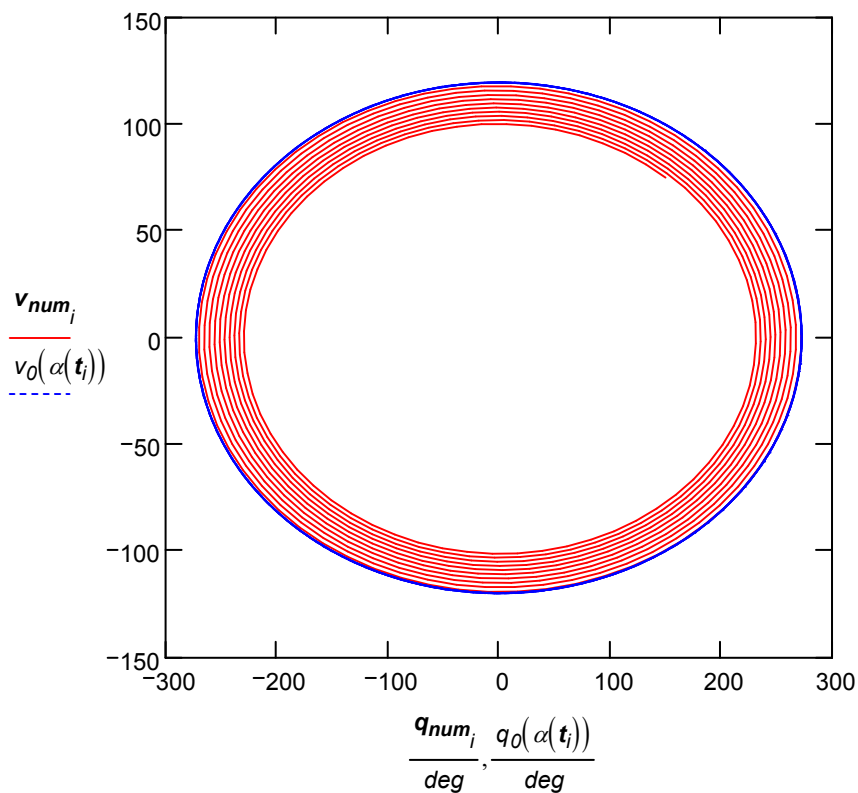
$$\mathbf{q} := \begin{pmatrix} q_0 \\ v_0 \cdot s \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}(t, \mathbf{q}) := \begin{pmatrix} q_1 \\ -\omega_0^2 \cdot q_0 + \lambda \cdot \omega_0^2 \cdot f(q_1 \cdot s^{-1}) \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} := rkfixe(\mathbf{q}, 0, T_t \cdot s^{-1}, np, \mathbf{D})$$

$$t := \mathbf{Z}^{(0)} \cdot s \quad \mathbf{q}_{num} := \mathbf{Z}^{(1)} \quad \mathbf{v}_{num} := \mathbf{Z}^{(2)} \cdot s^{-1}$$

Graphe du mouvement



Orbite



Cas d'une vitesse initiale nulle - observation sur une période

Durée d'observation (nombre de périodes): $nb_p := 1$ $T_t := nb_p \cdot T_0$ $np := 512 \cdot nb_p - 1$ $i := 0..np$

$$\mathbf{q} := \begin{pmatrix} q_m \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Z} := rkfixe(\mathbf{q}, 0, T_t \cdot s^{-1}, np, \mathbf{D}) \quad \mathbf{t} := \mathbf{Z}^{\langle 0 \rangle} \cdot s \quad \mathbf{q}_{num} := \mathbf{Z}^{\langle 1 \rangle} \quad \mathbf{v}_{num} := \mathbf{Z}^{\langle 2 \rangle} \cdot s^{-1}$$

$$CSq := cspline(\mathbf{t}, \mathbf{q}_{num}) \quad q_{num}(\tau) := interp(CSq, \mathbf{t}, \mathbf{q}_{num}, \tau) \quad v_{num}(\tau) := \frac{d}{d\tau} q_{num}(\tau)$$

Première approximation du mouvement

$$F(\varepsilon, \alpha) := \frac{1}{\lambda} \cdot \left[\varepsilon \cdot f_b + 2 \cdot \eta_b \cdot q_m \cdot \sin(\alpha) + \varepsilon \cdot \kappa_b \cdot (q_m \cdot \sin(\alpha))^2 \right]$$

Première alternance $\varepsilon := 1$

$$Ya1_1(\alpha) := q_m - \lambda \cdot \int_0^\alpha F(\varepsilon, \alpha') \cdot \sin(\alpha') d\alpha' \quad xa1_1(\alpha) := \frac{\lambda}{q_m} \cdot \int_0^\alpha F(\varepsilon, \alpha') \cdot \cos(\alpha') d\alpha'$$

$$Ya1_1(\alpha) := q_m - \left[f_b \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \eta_b \cdot q_m \cdot (\alpha - \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)) + \kappa_b \cdot q_m^2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \cos(\alpha) + \frac{1}{3} \cdot \cos(\alpha)^3 \right) \right]$$

$$xa1_1(\alpha) := \frac{1}{q_m} \cdot \left(f_b \cdot \sin(\alpha) + \eta_b \cdot q_m \cdot \sin(\alpha)^2 + \frac{1}{3} \cdot \kappa_b \cdot q_m^2 \cdot \sin(\alpha)^3 \right)$$

$$\phi a1_1(\alpha) := \alpha - xa1_1(\alpha) \quad qa1_1(\alpha) := Ya1_1(\alpha) \cdot \cos(\phi a1_1(\alpha)) \quad va1_1(\alpha) := -\omega_0 \cdot Ya1_1(\alpha) \cdot \sin(\phi a1_1(\alpha))$$

Deuxième alternance $\varepsilon := -1$

$$Ya2_1(\alpha) := Ya1_1(\pi) - \lambda \cdot \int_\pi^\alpha F(\varepsilon, \alpha') \cdot \sin(\alpha') d\alpha' \quad xa2_1(\alpha) := xa1_1(\pi) + \frac{\lambda}{q_m} \cdot \int_\pi^\alpha F(\varepsilon, \alpha') \cdot \cos(\alpha') d\alpha'$$

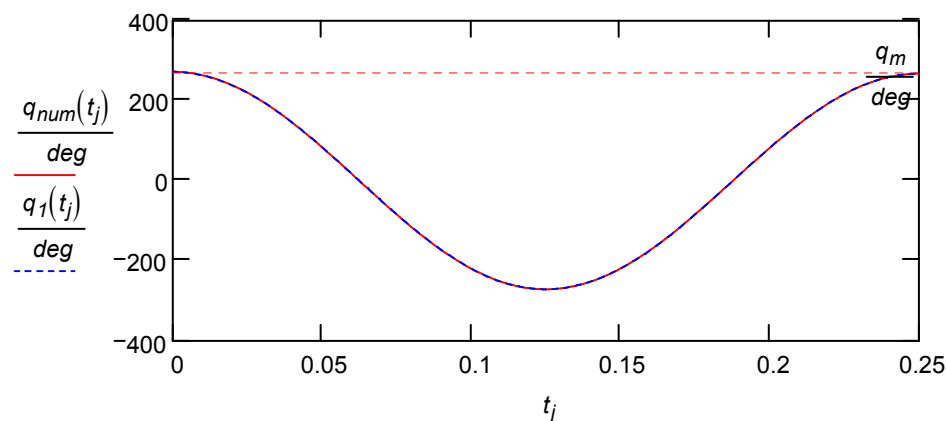
$$Ya2_1(\alpha) := q_m - \left[f_b \cdot (3 + \cos(\alpha)) + \eta_b \cdot q_m \cdot (\alpha - \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)) + \kappa_b \cdot q_m^2 \cdot \left(2 + \cos(\alpha) - \frac{1}{3} \cdot \cos(\alpha)^3 \right) \right]$$

$$xa2_1(\alpha) := \frac{1}{q_m} \cdot \left(-f_b \cdot \sin(\alpha) + \eta_b \cdot q_m \cdot \sin(\alpha)^2 - \frac{1}{3} \cdot \kappa_b \cdot q_m^2 \cdot \sin(\alpha)^3 \right)$$

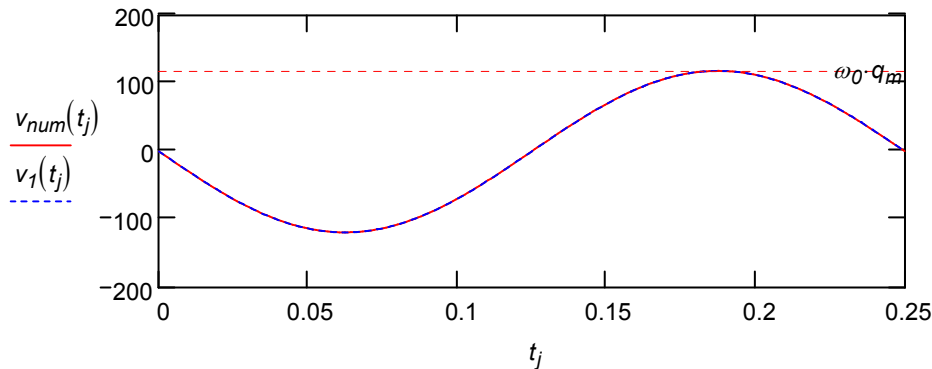
$$\phi a2_1(\alpha) := \alpha - xa2_1(\alpha) \quad qa2_1(\alpha) := Ya2_1(\alpha) \cdot \cos(\phi a2_1(\alpha)) \quad va2_1(\alpha) := -\omega_0 \cdot Ya2_1(\alpha) \cdot \sin(\phi a2_1(\alpha))$$

$$q_1(t) := qa1_1(\alpha(t)) \cdot \left(0 \leq t \leq \frac{T_0}{2} \right) + qa2_1(\alpha(t)) \cdot \left(\frac{T_0}{2} < t \leq T_0 \right)$$

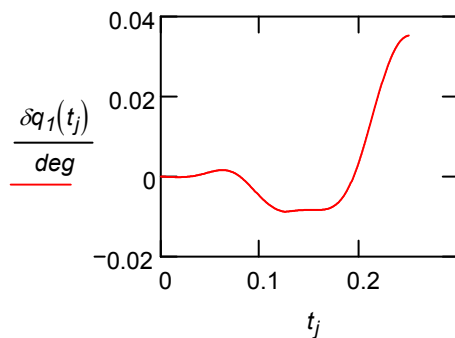
Graphes du mouvement $n := 256$ $j := 0..n$ $t_j := \frac{T_0}{n} \cdot j$



$$v_1(t) := va1_1(\alpha(t)) \cdot \left(0 \leq t \leq \frac{T_0}{2}\right) + va2_1(\alpha(t)) \cdot \left(\frac{T_0}{2} < t \leq T_0\right)$$



Différence entre solution numérique et approximation du premier ordre $\delta q_1(t) := q_{num}(t) - q_1(t)$



$$q_{num}(T_0) - q_1(T_0) = 0.035 \text{ deg}$$

$$(q_m \cdot \lambda)^2 = 0.038 \text{ deg}$$

Première approximation de la perturbation d'amplitude

$$\Delta q_1 := -\left(4 \cdot f_b + 2 \cdot \pi \cdot \eta_b \cdot q_m + \frac{8}{3} \cdot \kappa_b \cdot q_m^2\right)$$

$$\Delta q_1 = -4.853 \text{ deg}$$

Vérification numérique $\Delta q_1 := -2 \cdot \lambda \cdot \int_0^\pi F(1, \alpha) \cdot \sin(\alpha) d\alpha$ $\Delta q_1 = -4.853 \text{ deg}$

Part due au frottement constant $\Delta q_c(q) := 4 \cdot f_b$ $\Delta q_c(q_m) \cdot \left|\Delta q_1\right|^{-1} = 23.612 \%$

Part due au frottement visqueux $\Delta q_v(q) := 2 \cdot \pi \cdot \eta_b \cdot q$ $\Delta q_v(q_m) \cdot \left|\Delta q_1\right|^{-1} = 70.673 \%$

Part due au frottement quadratique $\Delta q_q(q) := \frac{8}{3} \cdot \kappa_b \cdot q^2$ $\Delta q_q(q_m) \cdot \left|\Delta q_1\right|^{-1} = 5.715 \%$

Nombre d'oscillations jusqu'à l'arrêt complet

$$q_0 := q_m \quad q_0 = 4.764$$

$$q_{osc} :=$$

$$i \leftarrow 0$$

$$q \leftarrow q_m$$

$$\text{while } q > f_b$$

$$i \leftarrow i + 1$$

$$q \leftarrow q - \left(4 \cdot f_b + 2 \cdot \pi \cdot \eta_b \cdot q + \frac{8}{3} \cdot \kappa_b \cdot q^2\right)$$

$$q_{osc_i} \leftarrow q$$

$$q_{osc}$$

$$Nb_{osc} := \text{dernier}(q_{osc}) - 1$$

$$Nb_{osc} = 107$$

$$q_{fin} := q_{osc_{Nb_{osc}}}$$

$$q_{fin} = 0.504 \text{ deg}$$

$$\text{temps} := Nb_{osc} \cdot T_0$$

$$\text{temps} = 26.75 \text{ s}$$

Première approximation de la perturbation de période

$$x_{a21}(2 \cdot \pi) = 0 \quad \Delta T_1 := x_{a21}(2 \cdot \pi) \cdot \omega_0^{-1} \quad \boxed{\Delta T_1 = 0 \text{ s}}$$

Vérification numérique $\Delta T_1 := 2 \cdot \frac{\lambda}{\omega_0 \cdot q_m} \cdot \int_0^\pi F(1, \alpha) \cdot \cos(\alpha) d\alpha \quad \Delta T_1 = 0 \text{ s}$

Deuxième approximation des perturbations d'amplitude et de période

Pour la première alternance $\varepsilon := 1$

$$Y_1(\alpha) := Ya1_1(\alpha) \quad \Delta Y_1(\alpha) := Ya1_1(\alpha) - q_m \quad v_1(\alpha) := va1_1(\alpha) \quad x_1(\alpha) := xa1_1(\alpha) \quad \varphi_1(\alpha) := \varphi a1_1(\alpha)$$

$$F_0(\alpha) := \frac{1}{\lambda} \cdot \left[f_b + 2 \cdot \eta_b \cdot q_m \cdot \sin(\alpha) + \kappa_b \cdot (q_m \cdot \sin(\alpha))^2 \right] \quad F_1(\alpha) := \frac{1}{\lambda} \cdot \left(f_b - 2 \cdot \frac{\eta_b}{\omega_0} \cdot v_1(\alpha) + \frac{\kappa_b}{\omega_0^2} \cdot v_1(\alpha)^2 \right)$$

Deuxième approximation de la perturbation d'amplitude

$$Y_2 := q_m - 2 \cdot \lambda \cdot \int_0^{\pi + xa1_1(\pi)} F_1(\alpha') \cdot \sin(\varphi a1_1(\alpha')) d\alpha' \quad x_2 := 2 \cdot \lambda \cdot \int_0^{\pi + xa1_1(\pi)} F_1(\alpha') \cdot \frac{\cos(\varphi a1_1(\alpha'))}{Ya1_1(\alpha')} d\alpha'$$

$$Y_2 = 268.106 \text{ deg} \quad Y_2 - q_m = -4.835 \text{ deg} \quad x_2 = 1.533 \times 10^{-5}$$

$$u(\alpha) := 0 \quad s(\alpha) := \frac{-2}{\lambda \cdot \omega_0} \cdot (\eta_b + \kappa_b \cdot q_m \cdot \sin(\alpha)) \quad h(\alpha) := \int_0^\alpha F_0(\alpha') \cdot \sin(\alpha') d\alpha'$$

$$h(\alpha) := \frac{1}{\lambda} \cdot \left[f_b \cdot (1 - \cos(\alpha)) + \eta_b \cdot q_m \cdot (\alpha - \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha)) + \kappa_b \cdot q_m^2 \cdot \left(\frac{2}{3} - \cos(\alpha) + \frac{1}{3} \cdot \cos(\alpha)^3 \right) \right]$$

$$L_1 := \int_0^\pi (F_0(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + q_m \cdot \omega_0 \cdot s(\alpha)) \cdot h(\alpha) d\alpha$$

$$L_1 := \frac{1}{\lambda^2} \cdot \left[2 \cdot f_b^2 - \frac{4}{3} \cdot f_b \cdot \kappa_b \cdot q_m^2 - \frac{1}{2} \cdot (\pi \cdot \eta_b \cdot q_m)^2 - 2 \cdot \pi \cdot \eta_b \cdot \kappa_b \cdot q_m^3 - \frac{16}{9} \cdot \kappa_b^2 \cdot q_m^4 \right] \quad L_1 = -17.787$$

$$K_2 := \int_0^\pi F_0(\alpha)^2 d\alpha \quad L_2 := \int_0^\pi (2 \cdot F_0(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - q_m \cdot u(\alpha)) \cdot h(\alpha) d\alpha \quad K_2 = 39.15 \quad L_2 = -33.214$$

$$L_2 := \frac{-1}{\lambda^2} \cdot \left(\pi \cdot f_b^2 + 8 \cdot f_b \cdot \eta_b \cdot q_m + \pi \cdot f_b \cdot \kappa_b \cdot q_m^2 + \frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \eta_b^2 \cdot q_m^2 + \frac{32}{9} \cdot \eta_b \cdot \kappa_b \cdot q_m^3 + \frac{5}{24} \cdot \pi \cdot \kappa_b^2 \cdot q_m^4 \right)$$

$$K_2 := \frac{1}{\lambda^2} \cdot \left(\pi \cdot f_b^2 + 8 \cdot f_b \cdot \eta_b \cdot q_m + \pi \cdot f_b \cdot \kappa_b \cdot q_m^2 + 2 \cdot \pi \cdot \eta_b^2 \cdot q_m^2 + \frac{16}{3} \cdot \eta_b \cdot \kappa_b \cdot q_m^3 + \frac{3}{8} \cdot \pi \cdot \kappa_b^2 \cdot q_m^4 \right)$$

$$Y_2 := q_m - 2 \cdot \left(2 \cdot f_b + \pi \cdot \eta_b \cdot q_m + \frac{4}{3} \cdot \kappa_b \cdot q_m^2 \right) \cdot \left(1 - \frac{f_b}{q_m} \right) - 2 \cdot \frac{\lambda^2}{q_m} \cdot L_1 \quad Y_2 = 268.106 \text{ deg}$$

$$\Delta q_2(q) := -4 \cdot f_b - 2 \cdot \pi \cdot \eta_b \cdot q + 2 \cdot \pi \cdot \eta_b \cdot f_b - \frac{8}{3} \cdot \kappa_b \cdot q^2 + \frac{16}{3} \cdot \kappa_b \cdot q \cdot f_b + q \cdot \pi^2 \cdot \eta_b^2 + 4 \cdot q^2 \cdot \pi \cdot \eta_b \cdot \kappa_b + \frac{32}{9} \cdot q^3 \cdot \kappa_b^2$$

$$\boxed{\Delta q_2(q_m) = -4.835 \text{ deg}}$$

Part due au frottement constant	$\Delta q_c(q) := 4 \cdot f_b$	$\Delta q_c(q_m) \cdot \left \Delta q_2(q_m)^{-1} \right = 23.698 \%$
Part due au frottement visqueux	$\Delta q_v(q) := 2 \cdot \pi \cdot \eta_b \cdot q$	$\Delta q_v(q_m) \cdot \left \Delta q_2(q_m)^{-1} \right = 70.932 \%$
Part due au frottement quadratique	$\Delta q_q(q) := \frac{8}{3} \cdot \kappa_b \cdot q^2$	$\Delta q_q(q_m) \cdot \left \Delta q_2(q_m)^{-1} \right = 5.736 \%$

Part due aux termes de couplages non linéaires

$$\Delta q_{nl}(q) := \left| \Delta q_2(q) \right| - \Delta q_c(q) - \Delta q_v(q) - \Delta q_q(q) \quad \Delta q_{nl}(q_m) \cdot \left| \Delta q_2(q_m)^{-1} \right| = -0.366 \%$$

Différence entre solution numérique et approximation du deuxième ordre $q_{num}(T_0) - Y_2 = 0.018 \text{ deg}$

Différence entre approximations du premier et du deuxième ordre $\Delta q_2(q_m) - \Delta q_1 = 0.018 \text{ deg}$

Nombre d'oscillations jusqu'à l'arrêt complet $q_0 := q_m$

$q_{osc} := \begin{cases} i \leftarrow 0 \\ q \leftarrow q_m \\ \text{while } q > f_b \\ \quad \begin{cases} i \leftarrow i + 1 \\ q \leftarrow q + \Delta q_2(q) \\ q_{osc_i} \leftarrow q \end{cases} \\ q_{osc} \end{cases}$	$Nb_{osc} := \text{dernier}(q_{osc}) - 1$ $Nb_{osc} = 107$ $q_{fin} := q_{osc_{Nb_{osc}}}$ $q_{fin} = 0.922 \text{ deg}$ $\text{temps} := Nb_{osc} \cdot T_0 \quad \text{temps} = 26.75 \text{ s}$
---	--

Deuxième approximation de la perturbation de période

Par intégration numérique $x_2 = 1.533 \times 10^{-5}$ $\Delta T_2 := \frac{x_2}{\omega_0}$ $\Delta T_2 = 6.098 \times 10^{-7} \text{ s}$

Par la deuxième approximation $\Delta T_2 := \Delta T_1 + \frac{2 \cdot \lambda^2}{\omega_0^2 \cdot q_m^2} \cdot (K_2 + L_2)$ $\Delta T_2 := \frac{1}{\omega_0} \cdot \left(\pi \cdot \eta_b^2 + \frac{32}{9} \cdot \eta_b \cdot \kappa_b \cdot q_m + \frac{\pi}{3} \cdot \kappa_b^2 \cdot q_m^2 \right)$
 $\Delta T_2 = 6.139 \times 10^{-7} \text{ s}$

Défaut d'isochronisme $\mu(q) := \frac{-86400}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\pi \cdot \eta_b^2 + \frac{32}{9} \cdot \eta_b \cdot \kappa_b \cdot q + \frac{\pi}{3} \cdot \kappa_b^2 \cdot q^2 \right)$

Marche pour q_m $q_m = 272.941 \text{ deg}$ $\mu(q_m) = -0.212$

Part due au frottement constant $\Delta \mu_c(q) := 0$

Part due au frottement visqueux $\Delta \mu_v(q) := \frac{-86400}{2 \cdot \pi} \cdot (\pi \cdot \eta_b^2)$ $\Delta \mu_v(\theta_0) \cdot \mu(\theta_0)^{-1} = 81.62 \%$

Part due au frottement quadratique $\Delta \mu_q(q) := \frac{-86400}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{\pi}{3} \cdot \kappa_b^2 \cdot q^2 \right)$ $\Delta \mu_q(q_m) \cdot \mu(q_m)^{-1} = 0.99 \%$

Part due au couplage visqueux-quadratique

$$\Delta \mu_{vq}(q) := \frac{-86400}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{32}{9} \cdot \eta_b \cdot \kappa_b \cdot q \right) \quad \Delta \mu_{vq}(q_m) \cdot \mu(q_m)^{-1} = 17.57 \%$$

Défaut d'isochronisme

$$i := 0 \dots 270$$

$$q_{m_i} := i \cdot \frac{2 \cdot \pi}{270}$$

